2.4 Projective Space

☆ $\mathbb{P}^n$ の $\mathcal{O}(k)$ について理解を深める

$$\boxed{\text{スローガン：} \mathcal{O}(k) \text{の大域切断は} k \text{次斉次多項式} \ (k \geq 0)}$$

・ $\mathcal{O}(-1) = \{ (l, z) \in \mathbb{P}^n \times \mathbb{C}^{n+1} \mid z \in l \} \xrightarrow{pr_1} \mathbb{P}^n$ だった。

① $\mathcal{O}(-1) \subseteq \mathbb{P}^n \times \mathbb{C}^{n+1}$ ：自明束と見れる。

② $\overset{k>0}{\mathcal{O}(-k)} \subseteq \mathbb{P}^n \times (\mathbb{C}^{n+1})^{\otimes k}$ と見れる。

③ $s = \sum a_I z_{i_1} \cdots z_{i_k}$ は
$\in \mathbb{C}[z_0, \dots, z_n]_k$
：k次斉次多項式

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{C}^{n+1})^{\otimes k} & \ni & v_1 \otimes \cdots \otimes v_k \\ s \downarrow & ; & \downarrow \\ \mathbb{C} & \ni & \sum a_I v_1^{i_1} \cdots v_k^{i_k} \end{array}$$

：linear を定める。

④ s は

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}(-k) & \hookrightarrow & \mathbb{P}^n \times (\mathbb{C}^{n+1})^{\otimes k} \\ \hat{s} \downarrow & & \downarrow \mathrm{id} \times s \downarrow \\ \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} & = & \mathbb{P}^n \times \mathbb{C} \end{array}$$

$\in \mathrm{Hom}(\mathcal{O}(-k), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) = H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(k))$

を定める。

Prop. 2.4.1 $k \geq 0$

$\mathbb{C}[z_0, \dots, z_n]_k \xrightarrow[\cong]{\wedge} H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(k))$ ：標準的な同型

方針：$\mathbb{C}$-linear …まあOK

inj. ……・非零多項式は非零切断を定めることを示す。

surj. ……・$t \in H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(k))$ を取る。

・t に近い正則関数 $G : \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}$ を用意し、

$G(\lambda v) = \lambda^k G(v)$ を示す。

☆ 巾級数展開により、G は k次斉次多項式。

・$G \overset{\wedge}{\mapsto} t$.

prf.

inj. … $s \in \mathbb{C}[z_0,\dots,z_n]_k$ が $\hat{s}=0$ をみたすとする.

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{O}(-1) \arrow[rr, two heads] \arrow[d, phantom, "\vdots"] & & \mathbb{C}^{n+1} \arrow[d, phantom, "\vdots"] \\
\mathcal{O}(-k) \arrow[r, hook] \arrow[d, "0=\hat{s}"'] & \mathbb{P}^n \times (\mathbb{C}^{n+1})^{\otimes k} \arrow[r, "pr_2"] \arrow[d, "id\times s"] & (\mathbb{C}^{n+1})^{\otimes k} \arrow[d, "s"] \\
\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \arrow[r, phantom, "="] & \mathbb{P}^n \times \mathbb{C} \arrow[r, "pr_2"] & \mathbb{C}
\end{tikzcd}
$$

: 全射 (by def)

$\Downarrow$

: 全射

$\Downarrow$

s が(写像として) 0

$\Downarrow$

全ての a_I が 0 $\Rightarrow$ $s=0$.

surj. … $0 \neq t \in H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(k))$ を取る.

- k次斉次多項式 $s_0 \neq 0$ から定まる $\hat{s}_0 \in H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(k))$ を選ぶ.
- $F := t/\hat{s}_0$ は $K(\mathbb{P}^n)$ の元を定める (cf. 2.2.27前)
- $$
\begin{tikzcd}
\mathbb{P}^n \arrow[dr, bend left, "F"] & \\
\mathbb{C}^{n+1}-\{0\} \arrow[u] \arrow[r, "\tilde{F}"] \arrow[d, phantom, "\parallel"] & \mathbb{C} \arrow[d, phantom, "\times s_0"] \\
\mathbb{C}^{n+1}-\{0\} \arrow[r, "G"] \arrow[d, hook, "\text{Hartogs}"'] & \mathbb{C} \\
\mathbb{C}^{n+1} \arrow[ur, bend right, "G"'] &
\end{tikzcd}
$$

$F \in K(\mathbb{P}^n)$

$\tilde{F} \in K(\mathbb{C}^{n+1}-\{0\})$

G : 正則関数.

- $G(\lambda v) = \lambda^k G(v)$. $\lambda \in \mathbb{C}$, $v \in \mathbb{C}^{n+1}$

$$
\left(\because\ \begin{aligned} G\circ\lambda &= (s_0\tilde{F})\circ\lambda \\ &= (s_0\circ\lambda)(\tilde{F}\circ\lambda) \\ &= (\lambda^k\circ s_0)(\tilde{F}) = \lambda^k G \end{aligned}\right.
$$

☆ G の $z=0$ での巾級数展開を考えると,

G は k次斉次の多項式となる.

- $\hat{G} = t$. $\left(\because\ \left(s_0\cdot\frac{t}{\hat{s}_0}\right)^\wedge = t.\right.$ pointwise に見れば明らか

□

$t \in H^0(\mathcal{O}(k))$: $\mathbb{P}^n$上のカンスウではない.

$\underbrace{\mathbb{C}[z_0,\dots,z_n]_k}_{s_0} \to$; $s_0 \mapsto \hat{s}_0$

$\lambda \mapsto \lambda^k$

$\frac{t}{\hat{s}_0}$: $\mathbb{P}^n$ の有理カンスウ. i.e., λ倍で不変 $\lambda \overset{\hat{s}_0}{\mapsto} \lambda^k$

証明より、乗法構造と両立するので、環同型

$$R(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(1)) = \bigoplus_{k\geq 0} H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(k)) \cong \mathbb{C}[z_0, \dots, z_n]$$

がある。

Ex. 2.2.5. 「L : 自明 $\Leftrightarrow$ L, L^* 両方の大域切断が非自明」

2.2.5 Let L be a holomorphic line bundle on a compact complex manifold X. Show that L is trivial if and only if L and its dual L^* admit non-trivial global sections. (Hint: Use the non-trivial sections to construct a non trivial section of $\mathcal{O} \cong L \otimes L^*$.)

より

Cor. 2.4.2. $k < 0$

$$H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(k)) = 0$$

まとめ

	2.4.3	2.4.1				2.4.2
$\mathbb{P}^n$	$\cdots\ \mathcal{O}(-1)$	$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}$	$\cdots$	$\mathcal{O}(k)$	$\cdots$	
H^0	ゼロ	$\mathbb{C}$	$\cdots$	$\mathbb{C}[z_0, \dots, z_n]_k$	$\cdots$	$\xrightarrow{\oplus} \mathbb{C}[z_0, \dots, z_n]$
H^1		?				
$\vdots$						

Rmk.
高次コホモロジーは
小平消滅で計算される。

☆標準束を計算する　$K_{\mathbb{P}^n} = \det(\Omega_{\mathbb{P}^n})$

> スローガン：標準束は $\mathcal{O}(-n-1)$

2通りの証明を見る.

① 直接的な計算 (Prop. 2.4.3)

方針： ベクトル束 $\longleftrightarrow$ 貼合せ関数

$$\begin{array}{ccc} T_{\mathbb{P}^n} & \overset{*}{\longmapsto} & \Omega_{\mathbb{P}^n} \\ \downarrow \det & & \downarrow \det \\ \det(T_{\mathbb{P}^n}) & \overset{*}{\longmapsto} & K_{\mathbb{P}^n} \\ \|? & \Leftarrow & \|? \\ \mathcal{O}(n+1) & \overset{*}{\longmapsto} & \mathcal{O}(-n-1) \end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc} \overset{\text{def 2.2.14}}{(J(\varphi_{ij})\circ\varphi_j)} & \longmapsto & ({}^tJ(\varphi_{ij})^{-1}\circ\varphi_j) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \underbrace{(\det(J(\varphi_{ij}))\circ\varphi_j)} & \longmapsto & (\det(J(\varphi_{ij}))^{-1}\circ\varphi_j) \end{array}$$

② Euler列 (Prop. 2.4.4.)

主張： $0 \to \mathcal{O} \to \bigoplus_{j=0}^{n} \mathcal{O}(1) \to T_{\mathbb{P}^n} \to 0$: ex.

$\rightsquigarrow$ $\vee$ をつけると逆向きの完全列

$$0 \leftarrow \mathcal{O} \leftarrow \bigoplus_{j=0}^{n} \mathcal{O}(-1) \leftarrow \Omega_{\mathbb{P}^n} \leftarrow 0 \ : \text{ex.}$$ になり.

$$K_{\mathbb{P}^n} = \det \Omega_{\mathbb{P}^n} \cong \det\Big(\bigoplus_{j=0}^{n} \mathcal{O}(-1)\Big) = \mathcal{O}(-n-1)$$

直観的な説明：

$$\Omega_{\mathbb{P}^n}|_{U_i} = \mathrm{Hom}(T_{\mathbb{P}^n}|_{U_i}, \mathcal{O}_{U_i}) = \mathrm{Hom}(T_{\mathbb{C}^n}, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}) = \Omega_{\mathbb{C}^n}$$

$$0 = z_i \frac{1}{z_i} - z_j \frac{1}{z_j}$$

$$\begin{array}{c} \quad\ \ i \qquad\quad j \\ \Big(\cdots \frac{1}{z_i} \cdots -\frac{1}{z_j} \cdots\Big) \end{array}$$

$$0 \leftarrow \mathcal{O} \longleftarrow \bigoplus_{j=0}^{n} \mathcal{O}(-1) \longleftarrow \Omega_{\mathbb{P}^n} \leftarrow 0$$

e_j

正則関数は

$$\frac{n\text{次}}{n\text{次}} = \sum z_j \frac{n-1\text{次}}{n\text{次}}$$

と書ける.

$\mathbb{C}^2$

$\uparrow 2$ 自明化で次数がズレる

$\mathbb{P}^2 \supseteq U = \{x_0 \neq 0\}$ 上の正則関数

$$\frac{x_0x_1 - x_2^2}{x_0^2} = x_0 \boxed{\frac{x_1}{x_0^2}} - x_2 \boxed{\frac{x_2}{x_0^2}} \in \mathcal{O}(-1)(U)$$

その表示の核は、U_i 上

$$\Big(0 \cdots \underset{\hat{i}}{\frac{z_j}{z_i^2}} \cdots -\underset{\hat{j}}{\frac{1}{z_i}} \cdots 0\Big)$$ で生成されるが

$$z_i \frac{z_j}{z_i^2} - z_j \frac{1}{z_i} = 0$$

これは $\underbrace{\dfrac{e_i z_j - z_i e_j}{z_i^2}}$

$\Uparrow$ と定めると $\Omega_{\mathbb{P}^n}(U_i)$ と思える.

$\underbrace{d\Big(\frac{z_j}{z_i}\Big)}_{n\text{個}}$

Prop. 2.4.3. $K_{\mathbb{P}^n} \cong \mathcal{O}(-n-1)$.

prf. 前述の通り。$\{\det(J(\varphi_{ij}))\circ\varphi_j\}$ で定まるへが $\mathcal{O}(n+1)$ であることを示す。

$$
\begin{tikzcd}
\varphi_j(U_i\cap U_j) \ni \left(\cdots,\frac{z_i}{z_j},\cdots,\widehat{\frac{z_j}{z_j}},\cdots\right) & & (w_1,\cdots,w_i^{\neq 0},\cdots,w_n) \arrow[d, "\tilde{\varphi}_{ij}"] \\
U_i\cap U_j \ni (\cdots:z_i:\cdots:z_j:\cdots) \arrow[u, "\varphi_j"] \arrow[d, "\varphi_i"] & \varphi_{ij} \; = & \left(\frac{w_1}{w_i},\cdots,\frac{1}{w_i},\cdots,\frac{w_n}{w_i}\right) \arrow[d] \\
\varphi_i(U_i\cap U_j) \ni \left(\cdots,\widehat{\frac{z_i}{z_i}},\cdots,\frac{z_j}{z_i},\cdots\right) & & \left(\frac{w_1}{w_i},\cdots,\frac{1}{w_i},\cdots,\frac{w_n}{w_i}\right)
\end{tikzcd}
$$

$(j+1,i)$ 巡回
⋮
符号 $(-1)^{i-j-1}$

$$
\det(J(\varphi_{ij})) = (-1)^{i-j-1}\det\underbrace{\left(\frac{\partial\tilde{\varphi}_{ij}^k}{\partial w_l}\right)_{k,l}}_{\parallel}
$$

$$
\begin{pmatrix}
w_i^{-1} & 0 & .. & 0 & -\frac{w_1}{w_i^2} & 0 & . & . & 0 \\
0 & w_i^{-1} & .. & 0 & -\frac{w_2}{w_i^2} & 0 & . & . & 0 \\
. & & & & & & & & . \\
. & & & & & & & & . \\
0 & . & .. & w_i^{-1} & -\frac{w_{i-1}}{w_i^2} & 0 & . & . & 0 \\
 & & & & -\frac{1}{w_i^{-2}} & 0 & . & . & 0 \\
0 & . & .. & 0 & -\frac{w_{i+1}}{w_i^2} & w_i^{-1} & . & . & 0 \\
0 & . & .. & 0 & -\frac{w_n}{w_i^2} & 0 & . & . & w_i^{-1}
\end{pmatrix}
= (-1)^{i-j} w_i^{-(n+1)} \quad \text{より}
$$

$$
\begin{aligned}
\det(J(\varphi_{ij}))\circ\varphi_j &= (-1)^{i-j} w_i^{-(n+1)}\circ\varphi_j \\
&= (-1)^{i-j}\left(\frac{z_i}{z_j}\right)^{-(n+1)}
\end{aligned}
$$

一方 $\mathcal{O}(1)$ は cocycle $\left\{\frac{z_j}{z_i}\right\}$ で定まる。

$\mathcal{O}(n+1)$ は 〃 $\left\{\left(\frac{z_j}{z_i}\right)^{n+1}\right\}$ で定まる。

$\{(-1)^i\}$ のバウンダリだけ異なる。 □

Prop. 2.4.4 (Euler sequence)

$$0 \to \mathcal{O} \to \bigoplus_{j=0}^{n} \mathcal{O}(1) \to T_{\mathbb{P}^n} \to 0 \quad \text{: ex.}$$

(同値)

$$0 \leftarrow \mathcal{O} \xleftarrow{\varphi} \bigoplus_{j=0}^{n} \mathcal{O}(-1) \leftarrow \Omega_{\mathbb{P}^n} \leftarrow 0 \quad \text{: ex.}$$

Construction.

① $\mathcal{O}(-1) \hookrightarrow \bigoplus_{j=0}^{n} \mathcal{O}$ (構成)

$; \quad P \mapsto (z_j(P))_j$ on ℓ

$P \in \ell$, $z_j(P) \in \mathbb{C}$ ねじる.

② $\mathcal{O}(1) \otimes \mathcal{O}(-1) \hookrightarrow \bigoplus_{j=0}^{n} \mathcal{O}(1)$

$; \quad \lambda \otimes P \mapsto (z_j(P)\lambda)_j$ on ℓ $\quad ab\, z_j(R)\lambda(R)$

$\lambda \in \ell^*$, $P \in \ell$, $(z_j(P)\lambda) \in \ell^*$

$\ell \ni R \neq 0$, $P = aR$, $Q = bR$

$\wr\downarrow \qquad \|$

$\lambda(P) \mapsto (\lambda(P) z_j)_j$ on ℓ $\quad ab\, z_j(R)\lambda(R)$

$\lambda(P) \in \mathbb{C}$, $(\lambda(P)z_j) \in \ell^*$

③ $\mathcal{O} \hookrightarrow \bigoplus_{j=0}^{n} \mathcal{O}(1)$

$; \quad s \mapsto (s z_j)_j$ on ℓ

$s \in \mathbb{C}$, $s z_j \in \ell^*$ 双対

④ $\mathcal{O} \xleftarrow{\varphi} \bigoplus_{j=0}^{n} \mathcal{O}(-1)$

$; \quad \sum_{j=0}^{n} z_j(P_j) \leftarrow (P_j)_j$ on ℓ

$\sum z_j(P_j) \in \mathbb{C}$, $P_j \in \ell$ 制限

⑤ $\mathcal{O}|_{U_i} \xleftarrow{\varphi|_{U_i}} \bigoplus_{j=0}^{n} \mathcal{O}(-1)|_{U_i}$

$\| \qquad \wr\downarrow \oplus z_i$

$\mathcal{O}_{U_i} \xleftarrow{\varphi_i} \bigoplus_{j=0}^{n} \mathcal{O}_{U_i}$

$; \quad \sum_{j=0}^{n} w_j \frac{z_j}{z_i} \leftarrow (w_j)_j$ on $U \subseteq U_i = \{z_i \neq 0\}$

$w_j : U \to \mathbb{C}$

$$\sum_{j=0}^{n} P_j(-)^j \leftarrow (P_j(-))_j$$

$P_j(-)$ は $\mathcal{O}(-1)(U)$ の section i.e. $P_j(\ell) \in \ell$

$$\| \qquad \downarrow$$

$$\sum_{j=0}^{n} P_j(-)^i \frac{P_j(-)^j}{P_j(-)^i} \leftarrow (P_j(-)^i)_j$$

$$= \sum_{j=0}^{n} P_j(-)^i \cdot \frac{z_j}{z_i}(-)$$

$$\bigoplus_{j=0}^{n} \mathcal{O}(-1) \longleftarrow \Omega_{\mathbb{P}^n}$$

$$\vdots \qquad 制限 \qquad \vdots$$

$$\bigoplus_{j=0}^{n} \mathcal{O}(-1)|_{U_i} \longleftarrow \Omega_{\mathbb{P}^n}|_{U_i}$$

$$\wr\downarrow \oplus z_j \qquad\qquad \|$$

$$\bigoplus_{j=0}^{n} \mathcal{O}_{U_i} \xhookleftarrow{\phi_i} \bigoplus_{k \neq i} d\left(\frac{z_k}{z_i}\right) \cdot \mathcal{O}_{U_i}$$

$$; \quad e_k - \frac{z_k}{z_i} e_i \longleftarrow d\left(\frac{z_k}{z_i}\right)$$

〜 $U_i \cap U_j$ 上貼り合わせ 〜

$$\bigoplus_{j=0}^{n} \mathcal{O}_{U_i \cap U_j} \xleftarrow{\phi_i} \bigoplus_{k \neq i} d\left(\frac{z_k}{z_i}\right) \cdot \mathcal{O}_{U_i \cap U_j}$$

$$e_k - \frac{z_k}{z_i} e_i \longleftarrow d\left(\frac{z_k}{z_i}\right)$$

$\cdot z_j z_i^{-1} \downarrow$: コサイクル $\quad \circlearrowright \quad \|$

$$\frac{z_j}{z_i}\left(e_k - \frac{z_k}{z_i} e_i\right) \longleftarrow d\left(\frac{z_k}{z_j}\right)\frac{z_j}{z_i} - \frac{z_k}{z_i}\frac{z_j}{z_i} d\left(\frac{z_i}{z_j}\right)$$

$$\bigoplus_{j=0}^{n} \mathcal{O}_{U_i \cap U_j} \xleftarrow{\phi_j} \bigoplus_{k \neq i} d\left(\frac{z_k}{z_j}\right) \cdot \mathcal{O}_{U_i \cap U_j}$$

---

prf: $(w_j)_j = \sum w_j e_j$ が $\sum_{j=0}^{n} w_j \frac{z_j}{z_i} = 0$ をみたすならば、

$$\sum_k w_k d\left(\frac{z_k}{z_i}\right) \mapsto \sum_k w_k \left(e_k - \frac{z_k}{z_i} e_i\right) = \sum_k w_k e_k - \left(\sum_k w_k \frac{z_k}{z_i}\right) e_i = \sum_k w_k e_k. \quad \square$$

Rmk. 2.4.5

- ひとつ捻ると $\qquad 0 \to \Omega_{\mathbb{P}^n}(1) \to \bigoplus_{j=0}^{n} \mathcal{O} \to \mathcal{O}(1) \to 0.$
- 座標に依存しない表示 :

  V : vect. sp. に対し $V^* = H^0(\mathbb{P}(V), \mathcal{O}(1))$ であり.

$$0 \to \Omega_{\mathbb{P}(V)}(1) \to V^* \otimes \mathcal{O} \xrightarrow{ev} \mathcal{O}(1) \to 0.$$

vect.sp. を V として これを使うと

- $$\begin{tikzcd} E(x) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & \{x\} \arrow[d] \\ E \arrow[r] & X \\ \pi^*E \arrow[r] \arrow[u] \arrow[ur, phantom, "\urcorner", very near start] & \mathbb{P}(E) \arrow[u, "\pi"] \end{tikzcd}$$

  $E \to X$: holo. vect. b'dle.

  π : 付随する proj. b'dle.

$$0 \to \Omega_{\mathbb{P}(E(x))}(1) \to E(x)^* \otimes \mathcal{O} \to \mathcal{O}(1) \to 0.$$

$\Downarrow$ 貼る

$$0 \to \underbrace{\Omega_\pi}_{\text{rel.}} \otimes \underbrace{\mathcal{O}_\pi(1)}_{\text{rel.}} \to \pi^*E^* \to \underbrace{\mathcal{O}_\pi(1)}_{\text{rel.}} \to 0.$$

: rel. Euler seq.

Cor. 2.4.6. $\mathrm{Kod}(\mathbb{P}^n) = -\infty$

($\overset{\text{def}}{\iff} \bigoplus_{m \geq 0} H^0(\mathbb{P}^n, K_{\mathbb{P}^n}^{\otimes m}) \cong \mathbb{C}$

左辺を $R(\mathbb{P}^n)$ とかくのだった。)

$\because$ $K_{\mathbb{P}^n} = \mathcal{O}(-n-1)$, $K_{\mathbb{P}^n}^{\otimes m} = \mathcal{O}(-m(n+1))$ は $m \geq 1$ で大域切断をもたない. $\square$

〈観察〉

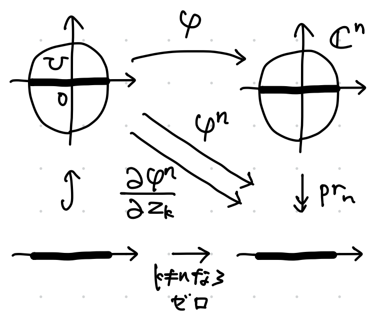
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^n \supseteq U & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{C}^n \\ \cup & & \cup \\ \{z_n = 0\} & \longrightarrow & \{z_n = 0\} \end{array}$$

U : conn., 0を含む

なる $h = \dfrac{\varphi^n}{z_n}$: holo. より

(i.e. $\varphi^n(\cdots, 0) \equiv 0$ なる)

$$\left.\frac{\partial \varphi^n}{\partial z_k}\right|_{\{z_n=0\}} = \begin{cases} 0 & k = 1, \ldots, n-1 \\ h|_{\{z_n=0\}} & k = n \end{cases}.$$

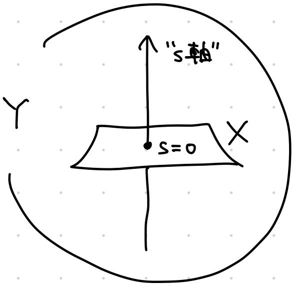


Cor. 2.4.7.

(L: Y上の line bdle)

$Y \supseteq X$: 滑らかな超曲面で $s \in H^0(Y, L)$ で定義されるとする.

このとき $\mathcal{N}_{X/Y} = L|_X$, $K_X = (K_Y \otimes L)|_X$



LがY内の"座標軸"を与える.

例. $\mathbb{P}^2 \supseteq \mathbb{P}^1 = \{x_0 = 0\}$

このとき $\mathbb{P}^1$は $x_0 \in H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1))$で定義される.

- $0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)^{\oplus 2} \to T_{\mathbb{P}^1} \to 0$, $T_{\mathbb{P}^1} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2)$
- $0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)^{\oplus 3} \to T_{\mathbb{P}^2}|_{\mathbb{P}^1} \to 0$, $T_{\mathbb{P}^2}|_{\mathbb{P}^1} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$
- $\mathcal{N}_{\mathbb{P}^1/\mathbb{P}^2} = \mathrm{Coker}(T_{\mathbb{P}^1} \to T_{\mathbb{P}^2}|_{\mathbb{P}^1}) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$ 一致.

prf.

$U_i \xrightarrow[\sim]{\varphi_i} \varphi_i(U_i) \subseteq \mathbb{C}^n$ をfix. 〈観察〉を φ_{ij} に使い.

① 自明化 $U_i \cap X \xrightarrow{\sim} \varphi_i(U_i) \cap \{z_n = 0\}$

$$\begin{tikzcd} \varphi_j(U_i \cap U_j) \arrow[rr] & & \varphi_i(U_i \cap U_j) \\ & U_i \cap U_j \arrow[ul, "\sim", "\varphi_j"'] \arrow[ur, "\sim"', "\varphi_i"] & \end{tikzcd}$$

$$J(\varphi_{ij})|_X = \begin{pmatrix} J(\varphi_{ij}|_X) & * \\ 0 & \frac{\partial \varphi_{ij}^n}{\partial z_n}\Big|_X \end{pmatrix}. \quad (T_Y|_X \text{の変換}) = \begin{pmatrix} T_X\text{の変換} & * \\ 0 & \frac{\partial \varphi_{ij}^n}{\partial z_n} \circ \varphi_j\Big|_X \end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow \mathcal{N}_{X/Y} = \mathrm{Coker}(T_X \hookrightarrow T_Y|_X)$ はコサイクル $\left\{ \frac{\partial \varphi_{ij}^n}{\partial z_n} \circ \varphi_j \Big|_X \right\}$ で定義される.

② (2.3.18) $L \cong \mathcal{O}(X)$ (Xをdivisorと見ている)

コサイクルはXの局所方程式 $\{U_i, \varphi_i^n\}$ による $\left\{ \frac{\varphi_i^n}{\varphi_j^n} \right\}$

③ $x \in X$ に対し $\varphi_j(x) = (z_1, \dots, z_{n-1}, 0)$ とおくと

$$\frac{\varphi_i^n}{\varphi_j^n}(x) = \frac{(\varphi_{ij} \circ \varphi_j)^n}{\varphi_j^n}(x) = \left(\frac{\varphi_{ij}^n}{z_n} \circ \varphi_j \right)(x) \quad . \quad \left(\frac{\varphi_{ij}^n}{z_n} = h \text{ とおくと} \right)$$

$$= h(z_1, \dots, z_{n-1}, 0) \overset{\text{観察}}{=} \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial z_n}(z_1, \dots, z_{n-1}, 0) = \left(\frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial z_n} \circ \varphi_j \right)(x)$$

④ 後半は前半 + adj. formula. □